Complessità dall'analisi di (modelli di) sistemi dinamici: qualche esempio

Luca Mari, 9.8.10 (prima parte)

Premessa

L'analisi di (modelli di) sistemi dinamici, e quindi lo studio dell'andamento nel tempo di loro variabili è il contesto di base in cui si tratta di complessità anche in termini formali. Poiché almeno in certi casi la qualità e la quantità della matematica necessaria per seguire tale analisi (se non per svilupparla da sé) la rendono comprensibile anche senza competenze particolarmente sofisticate, può essere interessante dare un'occhiata a qualche esempio al proposito. Le nozioni acquisite e le considerazioni sviluppate saranno applicabili, almeno in linea di principio, anche a situazioni più complesse.
Tutto quello che occorre per cominciare il nostro percorso è una certa dimestichezza con le nozioni di variabile e funzione: assumiamo che lo stato di un sistema (un concetto che diamo qui per primitivo) sia caratterizzato in ogni istante dai valori di una o più variabili $x_1,..., x_n$ che in generale variano nel tempo, e sono quindi considerabili funzioni del tempo, $x_i=x_i(t)$. Si possono allora studiare problemi così strutturati:
- assumendo che siano conosciuti i valori $x_i(t_0)$ delle variabili di stato in un certo "istante iniziale" t_0,
- inferire i valori $x_i(t)$ in istanti t successivi a t_0.

Se t_0 è il presente, così che i valori $x_i(t_0)$ potrebbero essere misurati sul sistema in esame, e quindi ogni $t > x_i(t_0)$ è un istante futuro, il problema che stiamo ponendo è dunque *di previsione*. L'inferenza può essere compiuta leggendo l'oroscopo o simili (spesso addirittura prescindendo dalla conoscenza dello stato attuale del sistema: l'oroscopo è generalmente formulato nella forma: "sarai...", e non: "se adesso sei..., allora sarai..."), oppure in accordo alla lezione che la fisica, da Galileo e Newton in poi, ci ha insegnato. E' naturalmente in questa seconda direzione che seguiremo il nostro percorso, che comincia con un problema che forse è addirittura paradigma di semplicità, ma che ci fornirà alcune basi per le tappe successive.

Il primo esempio

Supponiamo che all'istante iniziale t_0 sia stato depositato in banca un capitale $c = c(t_0)$ (non importa il riferimento di t_0 al calendario, se ciò sia successo un anno fa o succederà fra un anno: si imposta così il problema come tempo-stazionario e in conseguenza possiamo porre per semplicità $t_0 = 0$), e che sia stato concordato che a ogni intervallo di tempo Δt, per esempio ogni anno, la banca paghi gli interessi sul capitale a tasso costante $k > 0$, così che gli interessi pagati sul capitale c dopo un intervallo Δt saranno $c\Delta t$).
Una nota: poiché siamo interessati qui alla struttura del problema e della sua soluzione, e non ai valori specifici che se ne potrebbero ottenere, per semplicità tralasceremo le unità di misura per le variabili in gioco.
Ipotizzando che gli interessi siano interamente reinvestiti nel conto e che il conto non sia oggetto di versamenti né di prelievi, la dinamica del sistema risulta indipendente da elementi esterni al sistema stesso: il capitale evolve in modo autonomo, cioè senza essere influenzato dall'ambiente esterno, cosa che ne rende la previsione particolarmente semplice (senza questa ipotesi, e dunque descrivendo il sistema come aperto, si danno due opzioni, in base al fatto di assumere nota la successione dei versamenti e dei prelievi o meno: accenneremo nel seguito alla possibile strategia di soluzione da seguire in questi casi).
Si pone allora il problema di previsione del capitale $c(m\Delta t)$ sul conto all'istante $m\Delta t$, per $m \geq 1$, dunque per esempio dopo m anni (il problema generale richiederebbe di prevedere $c(t_0+m\Delta t)$, ma ricordiamo che abbiamo assunto $t_0 = 0$).
La dinamica di questo sistema è descritta da:

nuovo capitale = capitale attuale + interessi = capitale attuale + tasso di interesse × capitale attuale

cioè:

$$c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)$$

Prima di proseguire, consideriamo la struttura di questa equazione. Pur nella sua evidente semplicità, essa differisce dalle usuali equazioni algebriche per due motivi:
- la sua soluzione è costituita non da un numero, ma da una funzione, $c(t)$;
- tale funzione compare più volte nell'equazione, in riferimento a valori diversi della sua variabile indipendente, il tempo t.

Per queste ragioni, possiamo chiamare "diacronica" (cioè "a tempo che passa", in contrapposizione a "sincronica", cioè "a tempo congelato") questa equazione. *Le equazioni diacroniche sono lo strumento di base per calcolare previsioni*.
E' opportuno generalizzare da subito l'equazione che abbiamo appena scritto, nell'ipotesi che gli interessi possano essere pagati, e quindi depositati sul conto, anche con una frequenza diversa da quella usata per

stabilire il tasso di interesse. Per esempio k potrebbe essere calcolato su base annuale, e gli interessi pagati ogni sei mesi. Il modo più semplice per descrivere questa situazione è di adottare implicitamente il periodo in riferimento a cui è stabilito k come unità di misura del tempo, così che, per esempio, sei mesi corrisponde a $\Delta t = 0{,}5$. Gli interessi pagati ogni Δt non sono perciò $kc(t)$, ma la frazione di essi (supponendo $\Delta t<1$) maturata, cioè $kc(t)\Delta t$.

Questo problema è dunque caratterizzato da:

- capitale iniziale: $c(0)$
- tasso di interesse nell'unità di tempo: k
- periodo di pagamento degli interessi: Δt
- capitale al periodo $t+\Delta t$: $c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t = (1+k\Delta t)c(t)$

cioè:

$$c(t+\Delta t) = \bar{k}c(t)$$

avendo definito:

$$\bar{k} := 1+k\Delta t$$

Per trovare la soluzione $c(m\Delta t)$ al variare di $m\geq 1$, si può operare per iterazione:

$$\begin{array}{lll}
t_0 = 0 & \rightarrow & c(0) \\
t_1 = \Delta t & \rightarrow & c(t_1) = \bar{k}c(0) \\
t_2 = t_1+\Delta t = 2\Delta t & \rightarrow & c(t_2) = \bar{k}c(t_1) = \bar{k}^2c(0) \\
 & \dots & \\
t_m = t_{m-1}+\Delta t = m\Delta t & \rightarrow & c(m\Delta t) = \bar{k}^m c(0)
\end{array}$$

Per ragioni che saranno chiare poco più avanti, chiamiamo:

$$\begin{array}{ll}
c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t & \text{soluzione } \alpha \\
c(m\Delta t) = (1+k\Delta t)^m c(0) & \text{soluzione } \beta
\end{array}$$

Ripartendo dalla soluzione α, con un minimo di algebra si ottiene:

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t}=kc(t)$$

Il termine a sinistra è il rapporto incrementale della funzione $c(t)$ (in pratica, come varia la funzione al variare della sua variabile indipendente) e per valori di Δt decrescenti approssima sempre meglio la derivata di $c(t)$. Al limite, per $\Delta t\rightarrow 0$, e dunque ipotizzando che gli interessi siano pagati istantaneamente, non appena sono maturati, si ottiene:

$$\frac{dc(t)}{dt}=kc(t)$$

cioè un'equazione differenziale ordinaria (ODE, *ordinary differential equation*) del primo ordine (contiene solo una derivata prima), la cui soluzione, facilmente ottenibile per integrazione analitica, è:

$$c(t)=\int_0^t kc(\tau)d\tau=c(0)\mathrm{e}^{kt}$$

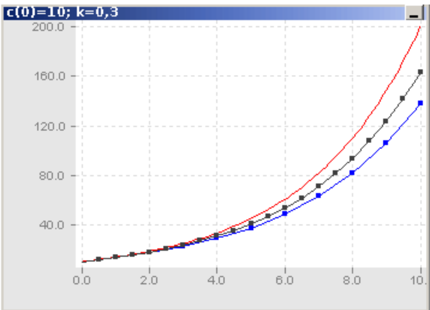
Chiamiamo:

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{dc(t)}{dt}=kc(t) & \text{soluzione } \gamma \\
c(t)=c(0)\mathrm{e}^{kt} & \text{soluzione } \delta
\end{array}$$

Abbiamo dunque ottenuto quattro soluzioni strutturalmente distinte per lo stesso problema, caratterizzate per l'ipotesi che il tempo vari in modo discreto (soluzioni α e β) o continuo (soluzioni γ e δ), e per la scelta di consentire una previsione a tempo locale (cioè "solo un istante in avanti": soluzioni α e γ) o globale (cioè in qualsiasi istante successivo a quello iniziale: soluzioni β e δ). In sintesi:

	Tempo discreto	Tempo continuo
Tempo locale	α: $c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t$	γ: $\dfrac{dc(t)}{dt}=kc(t)$
Tempo globale	β: $c(m\Delta t) = (1+k\Delta t)^m c(0)$	δ: $c(t)=c(0)\mathrm{e}^{kt}$

Come ci si può aspettare e come mostra il grafico che segue, la soluzione β si avvicina sempre più alla soluzione δ mano a mano che Δt si avvicina a zero.



Le relazioni operative tra queste soluzioni sono:

<table>
<tr><td></td><td>Tempo discreto</td><td></td><td>Tempo continuo</td></tr>
<tr><td>Tempo locale</td><td>α</td><td>– passaggio al limite →
← discretizzazione –</td><td>β</td></tr>
<tr><td></td><td>|
iterazione
↓</td><td></td><td>|
integrazione
↓</td></tr>
<tr><td>Tempo globale</td><td>β</td><td></td><td>δ</td></tr>
</table>

Le soluzioni δ sono paradigmatiche dello stile di previsione derivato dalla meccanica classica: a tempo continuo – da Newton e Leibniz in poi – e globale – grazie al lavoro dei matematici che hanno fornito soluzioni al problema dell'integrazione analitica di equazioni differenziali.
E' evidente la maggiore generalità delle soluzioni a tempo globale rispetto a quelle a tempo locale: le prime consentono infatti, con un unico calcolo, di prevedere il valore delle variabili di stato in un arbitrario istante di tempo e non solo "nell'istante successivo". D'altra parte, nell'impostare un problema si parte generalmente da equazioni a tempo locale, che devono essere trasformate in equazioni a tempo globale attraverso un'operazione analitica di iterazione (se a tempo discreto) o di integrazione (se a tempo continuo).
Si pone perciò il meta-problema: data una qualsiasi equazione a tempo locale, è sempre possibile trovare la sua corrispondente a tempo globale?