Complessità dall'analisi di (modelli di) sistemi dinamici: qualche esempio

Luca Mari, 9.8.10 (prima parte)

Premessa

L'analisi di (modelli di) sistemi dinamici, e quindi lo studio dell'andamento nel tempo di loro variabili è il contesto di base in cui si tratta di complessità anche in termini formali. Poiché almeno in certi casi la qualità e la quantità della matematica necessaria per seguire tale analisi (se non per svilupparla da sé) la rendono comprensibile anche senza competenze particolarmente sofisticate, può essere interessante dare un'occhiata a qualche esempio al proposito. Le nozioni acquisite e le considerazioni sviluppate saranno applicabili, almeno in linea di principio, anche a situazioni più complesse.

Tutto quello che occorre per cominciare il nostro percorso è una certa dimestichezza con le nozioni di variabile e funzione: assumiamo che lo stato di un sistema (un concetto che diamo qui per primitivo) sia caratterizzato in ogni istante dai valori di una o più variabili $x_1,..., x_n$ che in generale variano nel tempo, e sono quindi considerabili funzioni del tempo, $x_i=x_i(t)$. Si possono allora studiare problemi così strutturati:

- assumendo che siano conosciuti i valori $x_i(t_0)$ delle variabili di stato in un certo "istante iniziale" t_0,
- inferire i valori $x_i(t)$ in istanti t successivi a t_0.

Se t_0 è il presente, così che i valori $x_i(t_0)$ potrebbero essere misurati sul sistema in esame, e quindi ogni $t > t_0$ è un istante futuro, il problema che stiamo ponendo è dunque *di previsione*. L'inferenza può essere compiuta leggendo l'oroscopo o simili (spesso addirittura prescindendo dalla conoscenza dello stato attuale del sistema: l'oroscopo è generalmente formulato nella forma: "sarai...", e non: "se adesso sei..., allora sarai..."), oppure in accordo alla lezione che la fisica, da Galileo e Newton in poi, ci ha insegnato. E' naturalmente in questa seconda direzione che seguiremo il nostro percorso, che comincia con un problema che forse è addirittura paradigma di semplicità, ma che ci fornirà alcune basi per le tappe successive.

Il primo esempio

Supponiamo che all'istante iniziale t_0 sia stato depositato in banca un capitale $c = c(t_0)$ (non importa il riferimento di t_0 al calendario, se ciò sia successo un anno fa o succederà fra un anno: si imposta così il problema come tempo-stazionario e in conseguenza possiamo porre per semplicità $t_0 = 0$), e che sia stato concordato che a ogni intervallo di tempo Δt, per esempio ogni anno, la banca paghi gli interessi sul capitale a tasso costante $k > 0$, così che gli interessi pagati sul capitale c dopo un intervallo Δt saranno $c\Delta t$).

Una nota: poiché siamo interessati qui alla struttura del problema e della sua soluzione, e non ai valori specifici che se ne potrebbero ottenere, per semplicità tralasceremo le unità di misura per le variabili in gioco.

Ipotizzando che gli interessi siano interamente reinvestiti nel conto e che il conto non sia oggetto di versamenti né di prelievi, la dinamica del sistema risulta indipendente da elementi esterni al sistema stesso: il capitale evolve in modo autonomo, cioè senza essere influenzato dall'ambiente esterno, cosa che ne rende la previsione particolarmente semplice (senza questa ipotesi, e dunque descrivendo il sistema come aperto, si danno due opzioni, in base al fatto di assumere nota la successione dei versamenti e dei prelievi o meno: accenneremo nel seguito alla possibile strategia di soluzione da seguire in questi casi).

Si pone allora il problema di previsione del capitale $c(m\Delta t)$ sul conto all'istante $m\Delta t$, per $m\geq 1$, dunque per esempio dopo m anni (il problema generale richiederebbe di prevedere $c(t_0+m\Delta t)$, ma ricordiamo che abbiamo assunto $t_0 = 0$).

In ogni intervallo di tempo Δt, la dinamica di questo sistema è descritta da:

nuovo capitale = capitale attuale + interessi = capitale attuale + tasso di interesse × capitale attuale

cioè:

$$c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)$$

Prima di proseguire, consideriamo la struttura di questa equazione. Pur nella sua evidente semplicità, essa differisce dalle usuali equazioni algebriche per due motivi:

- la sua soluzione è costituita non da un numero, ma da una funzione, $c(t)$;
- tale funzione compare più volte nell'equazione, in riferimento a valori diversi della sua variabile indipendente, il tempo t.

Per queste ragioni, possiamo chiamare "diacronica" (cioè "a tempo che passa", in contrapposizione a "sincronica", cioè "a tempo congelato") questa equazione. *Le equazioni diacroniche sono lo strumento di base per calcolare previsioni*.

E' opportuno generalizzare da subito l'equazione che abbiamo appena scritto, nell'ipotesi che gli interessi possano essere pagati, e quindi depositati sul conto, anche con una frequenza diversa da quella usata per stabilire il tasso di interesse. Per esempio k potrebbe essere calcolato su base annuale, e gli interessi pagati ogni sei mesi. Il modo più semplice per descrivere questa situazione è di adottare implicitamente il periodo in riferimento a cui è stabilito k come unità di misura del tempo, così che, per esempio, sei mesi corrisponde a $\Delta t = 0{,}5$. Gli interessi pagati ogni Δt non sono perciò $kc(t)$, ma la frazione di essi (supponendo $\Delta t<1$) maturata, cioè $kc(t)\Delta t$.

Questo problema è dunque caratterizzato da:

- capitale iniziale: $c(0)$
- tasso di interesse nell'unità di tempo: k
- periodo di pagamento degli interessi: Δt
- capitale al periodo $t+\Delta t$: $c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t = (1+k\Delta t)c(t)$

cioè:

$$c(t+\Delta t) = \bar{k}c(t)$$

avendo definito:

$$\bar{k} := 1+k\Delta t$$

Per trovare la soluzione $c(m\Delta t)$ al variare di $m\geq 1$, si può operare per iterazione:

$$\begin{array}{lll}
t_0 = 0 & \rightarrow & c(0) \\
t_1 = \Delta t & \rightarrow & c(t_1) = \bar{k}c(0) \\
t_2 = t_1+\Delta t = 2\Delta t & \rightarrow & c(t_2) = \bar{k}c(t_1) = \bar{k}^2c(0) \\
 & \ldots & \\
t_m = t_{m-1}+\Delta t = m\Delta t & \rightarrow & c(m\Delta t) = \bar{k}^m c(0)
\end{array}$$

Per ragioni che saranno chiare poco più avanti, chiamiamo:

$$c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t \qquad \text{soluzione } \alpha$$

$$c(m\Delta t) = (1+k\Delta t)^m c(0) \qquad \text{soluzione } \beta$$

Ripartendo dalla soluzione α, con un minimo di algebra si ottiene:

$$\frac{c(t+\Delta t)-c(t)}{\Delta t} = kc(t)$$

Il termine a sinistra è il rapporto incrementale della funzione $c(t)$ (in pratica, come varia la funzione al variare della sua variabile indipendente) e per valori di Δt decrescenti approssima sempre meglio la derivata di $c(t)$. Al limite, per $\Delta t\rightarrow 0$, e dunque ipotizzando che gli interessi siano pagati istantaneamente, non appena sono maturati, si ottiene:

$$\frac{dc(t)}{dt} = kc(t)$$

cioè un'equazione differenziale ordinaria (ODE, *ordinary differential equation*) del primo ordine (contiene solo una derivata prima), la cui soluzione, facilmente ottenibile per integrazione analitica, è:

$$c(t)=\int_0^t kc(\tau)\,d\tau=c(0)\mathrm{e}^{kt}$$

Chiamiamo:

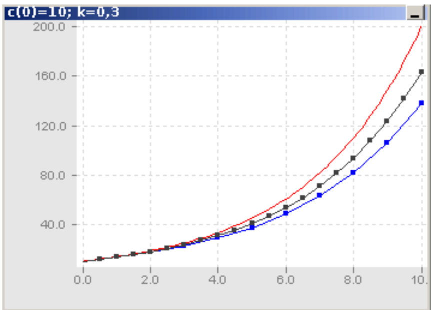
$$\frac{dc(t)}{dt} = kc(t) \qquad \text{soluzione } \gamma$$

$$c(t) = c(0)\,\mathrm{e}^{kt} \qquad \text{soluzione } \delta$$

Abbiamo dunque ottenuto *quattro* soluzioni strutturalmente distinte per lo *stesso* problema, caratterizzate per l'ipotesi che il tempo vari in modo discreto (soluzioni α e β) o continuo (soluzioni γ e δ), e per la scelta di consentire una previsione a tempo locale (cioè “solo un istante in avanti”: soluzioni α e γ) o globale (cioè in qualsiasi istante successivo a quello iniziale: soluzioni β e δ). In sintesi:

	Tempo discreto	Tempo continuo
Tempo locale	α: $c(t+\Delta t) = c(t)+kc(t)\Delta t$	γ: $\frac{dc(t)}{dt} = kc(t)$
Tempo globale	β: $c(m\Delta t) = (1+k\Delta t)^m c(0)$	δ: $c(t) = c(0)\,\mathrm{e}^{kt}$

Come ci si può aspettare e come mostra il grafico che segue, la soluzione β si avvicina sempre più alla soluzione δ mano a mano che *Δt* si avvicina a zero.



Le relazioni operative tra queste soluzioni sono:

<table>
<tr><td></td><td>Tempo discreto</td><td></td><td>Tempo continuo</td></tr>
<tr><td>Tempo locale</td><td>α</td><td>– passaggio al limite →
← discretizzazione –</td><td>β</td></tr>
<tr><td></td><td>|
iterazione
↓</td><td></td><td>|
integrazione
↓</td></tr>
<tr><td>Tempo globale</td><td>β</td><td></td><td>δ</td></tr>
</table>

Le soluzioni δ sono paradigmatiche dello stile di previsione derivato dalla meccanica classica: a tempo continuo – da Newton e Leibniz in poi – e globale – grazie al lavoro dei matematici che hanno fornito soluzioni al problema dell’integrazione analitica di equazioni differenziali.
E’ evidente la maggiore generalità delle soluzioni a tempo globale rispetto a quelle a tempo locale: le prime consentono infatti, con un unico calcolo, di prevedere il valore delle variabili di stato in un arbitrario istante di tempo e non solo “nell’istante successivo”. D’altra parte, nell’impostare un problema si parte generalmente da equazioni a tempo locale, che devono essere trasformate in equazioni a tempo globale attraverso un’operazione analitica di iterazione (se a tempo discreto) o di integrazione (se a tempo continuo).
Si pone perciò il meta-problema: data una qualsiasi equazione a tempo locale, è sempre possibile trovare la sua corrispondente a tempo globale?

Complessità dall'analisi di (modelli di) sistemi dinamici: qualche esempio

Luca Mari, 26.9.10 (seconda parte)

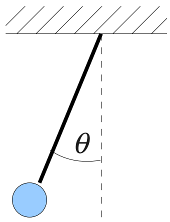
Premessa

Se nel primo esempio siamo partiti da una soluzione a tempo discreto, dunque una soluzione α nello schema, nella descrizione della dinamica di sistemi fisici si assume tradizionalmente l'ipotesi di tempo continuo: la base per la ricerca di una soluzione a tempo globale, β o δ, è dunque in tal caso un'equazione differenziale, cioè una soluzione γ. Si spiega così l'importanza che le equazioni differenziali e i metodi per la loro soluzione hanno avuto nelle scienze fisiche da quando, a partire da Galileo e soprattutto Newton, si sono presi in esame problemi di dinamica dei sistemi, inizialmente in meccanica, poi termodinamica, elettromagnetismo, …

Per mostrare concretamente questo ruolo delle equazioni differenziali, introduciamo un esempio tratto dalla fisica elementare. Benché diverso per ambito disciplinare – meccanica invece di economia – e base di partenza – tempo continuo invece di tempo discreto –, vedremo le analogie tra questo esempio e il precedente: come fossero due facce di una stessa medaglia (un avvertimento: nelle righe che seguono c'è un po' di matematica; la buona notizia per il lettore poco avvezzo a derivate e integrali è che la loro presenza è introdotta soprattutto per mostrare che le tecniche computazionali disponibili oggi consentono di non doversene occupare; vale quindi forse la pena di dar loro un'occhiata...).

Il secondo esempio

Consideriamo un pendolo, come quello schematizzato nella figura:



e supponiamo di essere interessati a descrivere la posizione angolare del pendolo stesso nel tempo, cioè l'andamento della variabile $\theta(t)$. Nei libri di fisica troviamo l'equazione appropriata:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+k_1\frac{d\theta(t)}{dt}+k_2\sin(\theta(t))=0$$

una ODE del secondo ordine (cioè che contiene fino alla derivata seconda della funzione da integrare). Si tratta di un'entità non facilmente trattabile con tecniche analitiche (diciamo: le competenze che si acquisiscono nel corso di Analisi 1 nei corsi di laurea di fisica o matematica non sono sufficienti...), ma con pochi e semplici cambiamenti possiamo meglio metterne in evidenza le caratteristiche. L'unica nozione richiesta è la linearità della derivata, cioè il fatto che la derivata seconda è uguale alla derivata della derivata:

$$\frac{d^2 ...}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,...}{dt}\right)$$

Se allora introduciamo una nuova variabile, definita come la derivata prima di $\theta(t)$:

$$\omega(t)=\frac{d\theta(t)}{dt}$$

si ha che:

$$\frac{d\omega(t)}{dt}=\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

In questo modo, la precedente equazione è trasformabile in un sistema di due ODE del primo ordine:

$$\begin{cases}\dfrac{d\omega(t)}{dt}=-k_1\omega(t)-k_2\sin(\theta(t))\\[2mm]\dfrac{d\theta(t)}{dt}=\omega(t)\end{cases}$$

Quella che abbiamo appena applicato è una tecnica generale: attraverso l'introduzione di $n-1$ variabili intermedie, una ODE di ordine n può essere trasformata in un sistema di n ODE di ordine 1. Il risultato è dunque una soluzione γ, nella forma di un sistema di equazioni del tipo:

$$\frac{d x_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Tradizionalmente si affrontano problemi di questo genere cercando di ottenerne una soluzione δ, dunque in questo caso l'espressione analitica della funzione $\theta(t)$. La tecnica generale da impiegare è chiamata *integrazione del sistema di ODE*, dato che corrisponde a integrare entrambi i termini di ogni equazione:

$$\int \frac{d x_i(\tau)}{d\tau} d\tau = \int f_i(x_1(\tau), \dots, x_n(\tau)) d\tau$$

e grazie al fatto che:

$$\int \frac{d x_i(\tau)}{d\tau} d\tau = x_i(t)$$

(cioè, in pratica, integrale e derivata sono operatori inversi) il nostro problema diventa:

$$\begin{cases} \omega(t) = \omega(t_0) + \int_{t_0}^{t} -k_1 \omega(\tau) - k_2 \sin(\theta(\tau)) d\tau \\ \theta(t) = \theta(t_0) + \int_{t_0}^{t} \omega(\tau) d\tau \end{cases}$$

A questo punto si comprende perché, come dichiarato sopra, una soluzione δ è non facilmente ottenibile: la prima delle due equazioni contiene il termine sin($\theta(t)$) e quindi è non lineare. Al proposito è interessante il seguente schema (tratto da un classico articolo di L. von Bertalanffy), in cui è evidenziato il caso corrispondente al nostro esempio (che il problema sia davvero "impossibile" o solo "molto difficile" cambia poco dal nostro punto di vista):

	equazioni					
	lineari			non lineari		
equazioni	una	diverse	molte	una	diverse	molte
algebriche	facilissima	facile	essenzialmente impossibile	molto difficile	molto difficile	impossibile
differenziali ordinarie	facile	difficile	essenzialmente impossibile	molto difficile	**impossibile**	impossibile
differenziali alle derivate parziali	difficile	essenzialmente impossibile	impossibile	impossibile	impossibile	impossibile

Si comprende dunque perché, allo scopo di cercare di ottenere comunque una soluzione δ, si possa scegliere di ridurre la complessità del problema linearizzandolo. Concretamente, si tratta di ammettere quella che in fisica si chiama approssimazione "per piccoli segnali":

sin($\theta(t)$) ≈ $\theta(t)$

(tecnicamente si tratta di sostituire la funzione sin(x) con il suo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine, cioè approssimando in ogni punto una funzione con la retta tangente) e che, *fino a che è accettabile* (si confronti:

x = 0 sin(x) = 0 → uguali
x = 0,1 sin(x) = 0,0998... → uguali fino al terzo decimale
x = 0,2 sin(x) = 0,198... → uguali fino al secondo decimale
x = 0,3 sin(x) = 0,295... → uguali fino al secondo decimale
x = 0,4 sin(x) = 0,38... → uguali fino al primo decimale

e così via), rende il problema trattabile analiticamente.
In questa situazione si vede in azione il concetto, impiegato così frequentemente da essere divenuto una sorta di simbolo, di *non-linearità come complessità*, e quindi di linearizzazione come semplificazione.

Ma invece di cercare di ottenere la soluzione δ, è possibile seguire una strada diversa, percorrendo a ritroso la logica del primo esempio e ripartendo da un sistema di ODE del primo ordine, ognuna dunque della forma:

$$\frac{d x_i(t)}{dt} = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t))$$

Invece di approssimare per linearizzazione, questa volta approssimiamo discretizzando il tempo, cioè trattando il differenziale dt come la differenza finita Δt. In pratica, ricordando la definizione di derivata:

$$\frac{dx(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

accettiamo che:

$$\frac{dx(t)}{dt}\approx\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

così che ogni ODE del primo ordine diventa (per semplicità dimentichiamo l'approssimazione e scriviamo "=" invece di "≈"):

$$\frac{x_i(t+\Delta t)-x_i(t)}{\Delta t}=f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t))$$

A questo punto, è solo con un po' di algebra elementare che si ottiene:

$$x_i(t+\Delta t)=x_i(t)+f_i(x_1(t),\ldots,x_n(t))\Delta t$$

che è la forma generica di una soluzione α.
In accordo a questa strategia, il nostro problema diventa perciò:

$$\begin{cases}\omega(t+\Delta t)=\omega(t)+[-k_1\omega(t)-k_2\sin(\theta(t))]\Delta t\\ \theta(t+\Delta t)=\theta(t)+[\omega(t)]\Delta t\end{cases}$$

la cui soluzione può essere semplicemente trovata per via iterativa, a partire da valori dati per le condizioni iniziali $\theta(t_0)$ e $\omega(t_0)$, per esempio mediante un foglio di calcolo (si noti che in ogni passo del calcolo tutti i termini a destra del segno di uguale nelle due espressioni hanno valori noti, e quindi il calcolo stesso non presenta alcuna difficoltà). Ciò non conduce a un'espressione analitica per la funzione $\theta(t)$, e quindi a una soluzione β, ma solo alla successione di valori numerici $\theta(t_0)$, $\theta(t_0+\Delta t)$, $\theta(t_0+2\Delta t)$, ..., ottenuta dunque per *integrazione numerica*.
Al di là del fatto estetico – è certamente più elegante una singola espressione analitica di una successione di valori numerici – la principale criticità di questo modo di procedere è dovuta alla necessità di calcolo replicato. In assenza di calcolatori programmabili ed efficienti, ciò rende questa strategia nei fatti impraticabile: si spiega così l'enfasi verso lo studio di metodi di integrazione analitica, che tuttora porta qualcuno a considerare l'analisi matematica, cioè appunto il calcolo differenziale e integrale affrontato per via analitica, quasi un sinonimo di matematica superiore. Ma nella situazione attuale, in cui la capacità di calcolo certo non manca, la via di trovare la soluzione di ODE mediante discretizzazione e integrazione numerica si propone come assai generale e flessibile, anche perché risulta applicabile a prescindere dalla linearità delle equazioni.
Se torniamo dunque al meta-problema con cui si era chiusa la prima parte – data una qualsiasi equazione a tempo locale, è sempre possibile trovare la sua corrispondente a tempo globale? – disponiamo ora di una risposta pragmatica: anche se la soluzione a tempo globale per via analitica non è nota (o non può essere trovata del tutto), se si accetta di operare a tempo discreto e per via numerica con pochi e semplici passaggi una ODE, lineare o meno, può diventare oggetto di calcolo previsivo e quindi di simulazione.
Rimane almeno un problema: a quali conseguenze conduce la trasformazione da tempo continuo a tempo discreto? Sotto quali condizioni la previsione rimane di qualità sufficiente? L'esplorazione di questo problema ci condurrà a scenari sorprendenti, finalmente davvero nel dominio della complessità.